UAA 5 : Fonctions Trigonométriques

Exercices supplémentaires

B. Radian, arcs et secteurs

1. Radian et conversion

1. Convertis les angles suivants en radians :

	Solutions
(1) -290°	$-\frac{29\pi}{18}$
(2) 970°	$\frac{97\pi}{18}$
(3) 510°	$\frac{17\pi}{6}$
(4) 210°	$\frac{7\pi}{6}$
(5) 240°	$\frac{4\pi}{3}$
(6) -945°	$-\frac{21\pi}{4}$
(7) 315°	$\frac{7\pi}{4}$
(8) -520°	$-\frac{26\pi}{19}$
(9) 300°	$\frac{5\pi}{3}$
(10) 555°	$\frac{37\pi}{12}$

2. Convertis les angles suivants en degrés :

	Solutions
(1) $\frac{\pi}{18}$	10°

(2) $\frac{35\pi}{18}$ 350°

(3) $-\frac{3\pi}{2}$ -270°

(4) $\frac{\pi}{3}$ 60°

(5) $-\frac{11\pi}{3}$ -660°

4. Exercices

1. Julien commence son entraînement de soccer à 19h. A 19h12, l'échauffement est terminé et son équipe et lui commencent les exercices d'entraînement.

Quelle surface de l'horloge a été courverte par l'aiguille des minutes entre le début et la fin de l'échauffement sachant que celle-ci a une longueur de 15 cm ?
Sol : 141,3 cm²

2. Le radar naval est utilisé depuis plus de 100 ans pour détecter tout obstacle possible sur la mer (bateau, glacier, etc.). L'image ci-dessous donne l'aperçu d'un radar en marche par un bateau de pêcheurs. 1 centimètre sur le radar équivaut à 10 m dans la réalité.

Sachant que le diamètre du radar est de 40 centimètres, réponds aux questions suivantes (assure-toi de toujours prendre des mesures d'angle au centre qui sont entre 0 et 180°) :

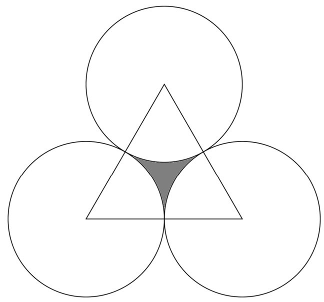
(1) Quelle surface réelle est couverte par le radar entre les obstacles 1 et 2 ?
Sol : 26 179 ?94 m²

(2) Quelle surface réelle est couverte par le radar entre les obstacles 2 et 4 ?
Sol : 59 620,45 m²

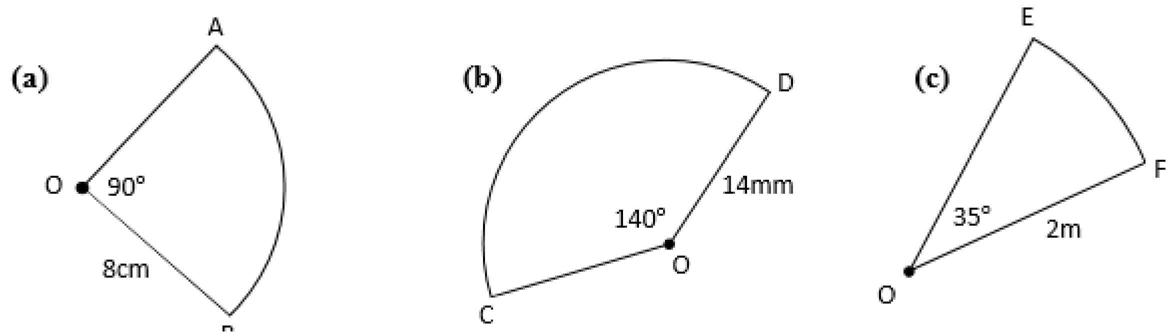
(3) Quelle surface réelle est couverte par le radar entre les obstacles 4 et 1 ?
Sol : 39 863,32 m²

3. Calcule l'aire de la surface grisée, appelée triangle curviligne, à l'intérieur du triangle équilatéral de côté *a*.

Sol : $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2 - \frac{a\pi}{24}$

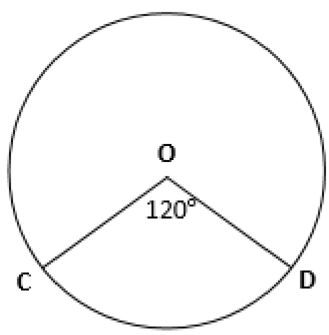


4. Calcule la longueur de l'arc dans chaque figure :



Sol : (a) 12,57 cm (b) 34,21 mm (c) 13,3 m

5. La corde $[CD]$ mesure 7,33 cm. Calcule l'aire du cercle.



C. Angles associés

1. Donne une amplitude du supplément de 54°.

   Sol : 126°

2. Donne une amplitude du complément de 210°.

   Sol : -120°

3. En te servant des angles associés, calcule les expressions suivantes :

	Solutions
(1) $\cos(-30°)$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
(2) $\sin 225°$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
(3) $\sin 330°$	$-\frac{1}{2}$
(4) $\tan 120°$	$-\sqrt{3}$

4. Sachant que $\tan 80° = 5,7$ et $\tan 10° = 0,18$ (à un centième près), détermine les valeurs de :

	Solutions
(1) $\tan 100°$	$= \tan(180° - 80°) = -\tan 80° = -5,7$
(2) $\tan 280°$	$= \tan(180° + 100°) = \tan 100° = -5,7$
(3) $\tan 190°$	$= \tan(180° + 10°) = \tan 10° = 0,18$
(4) $\tan(-170°)$	$= -\tan(170°) = -\tan(180° - 10°) = \tan 10° = 0,18$

5. Simplifie les expressions suivantes :

(1) $\dfrac{\sin(90°-\alpha).\cos(180°+\alpha)}{\cos(180°-\alpha).\tan(\alpha+180°)}$

Sol : $\dfrac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha}$

(2) $\dfrac{\sin(\alpha+180°).\cos(90°+\alpha)}{\tan(\alpha-180°).\cos(-\alpha)}$

Sol : $\sin\alpha$

(3) $\dfrac{\sin(90°+\alpha)}{\sin(\alpha+180°).\tan(90°-\alpha)}$

Sol : -1

6. Vérifie les identités trigonométriques :

(1) $(\sin\alpha+\cos\alpha+1)(\sin\alpha+\cos\alpha-1)=2\sin\alpha.\cos\alpha$

(2) $\tan a+\cot a=\dfrac{1}{\sin a.\cos a}$

(3) $\dfrac{\tan a}{1+\tan^2 a}=\sin a.\cos a$

(4) $\sin^4 a-\cos^4 a=2\sin^2 a-1$

E. Fonctions sinusoïdales

1. Trace le graphique des fonctions suivantes sur l'intervalle $[-2\pi;2\pi]$:

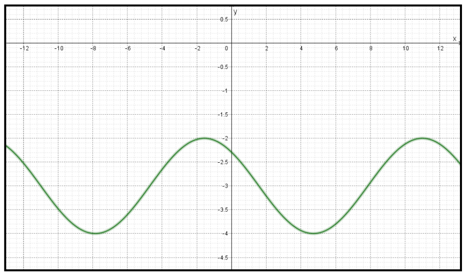
(1) $f(x)=\cos\left(\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{4}\right)-3$

Sol : 3 manipulations à partir de la fonction cosinus:

Diviser l'abscisse de tout point par 2.

Soustraire $\frac{\pi}{2}$ à l'abscisse de tout point.

Soustraire 3 à l'ordonnée de tout point.



(2) $f(x)=-2\sin(x-\pi)-1$

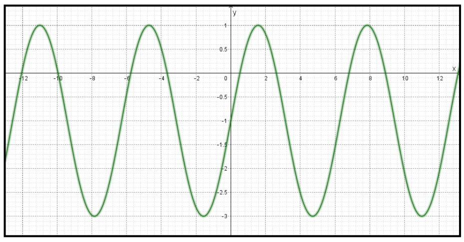
Sol : 3 manipulations à partir de la fonction sinus :

Ajouter π à l'abscisse de tout point.

Multiplier l'ordonnée de tout point par -2

.

Soustraire 1 à l'ordonnée de tout point.

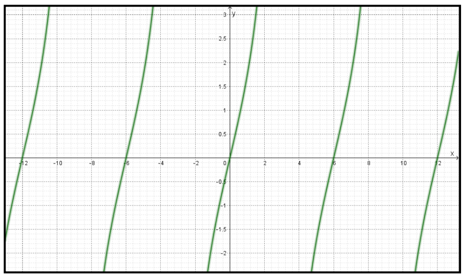


(3) $f(x)=3.\tan\left(\frac{\pi}{6}x\right)$

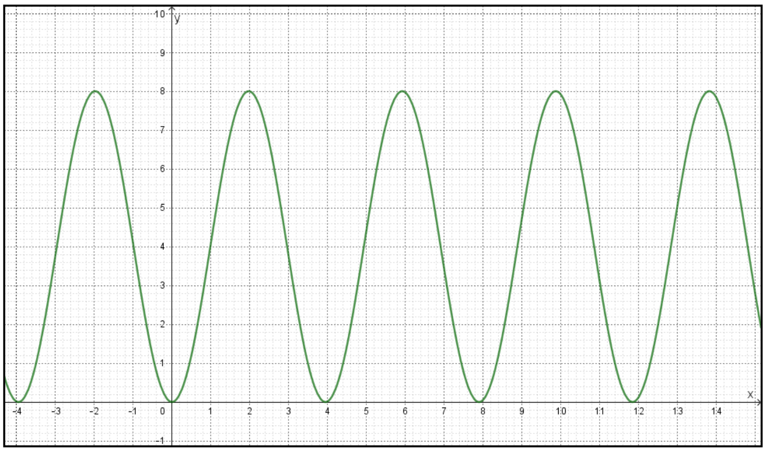
Sol : 2 manipulations à partir de la fonction tangente :

Diviser l'abscisse de tout point par $\frac{\pi}{6}$

Multiplier l'ordonnée de tout point par 3

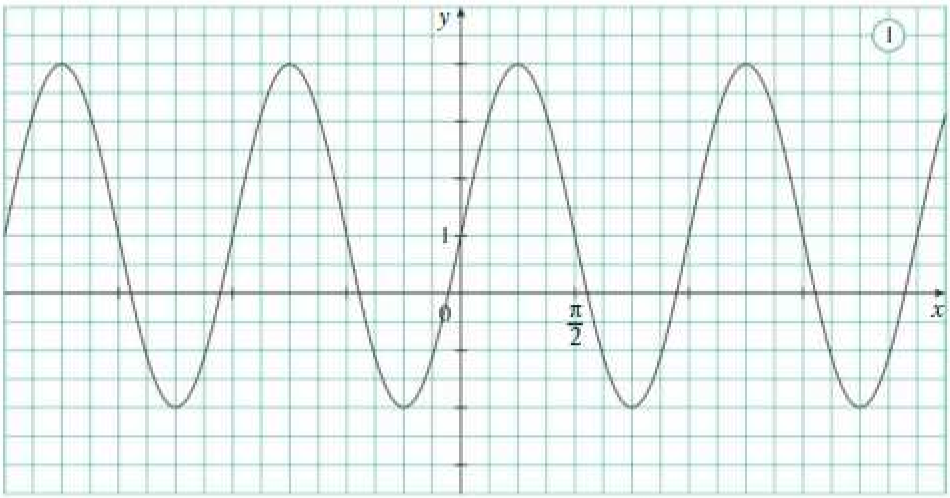


2. Détermine une expression de la fonction représentée :

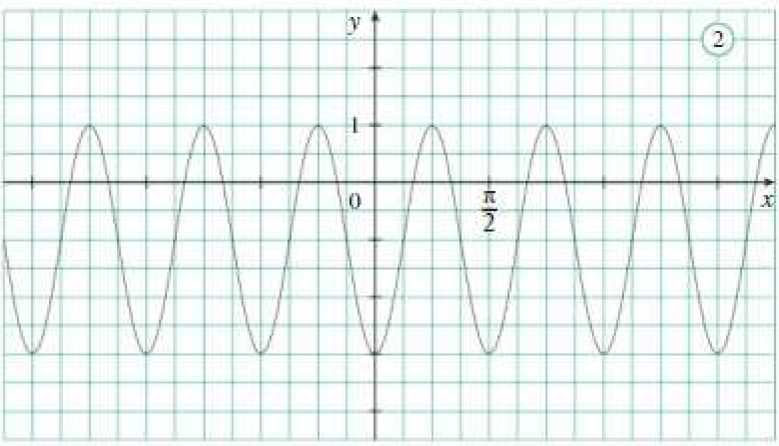


$Sol: \ f(t) = 4.\sin\left(\frac{5}{\pi}t - \frac{5}{\pi}\right) + 4$

3. Détermine l'expression analytique des fonctions dont on donne le graphique.



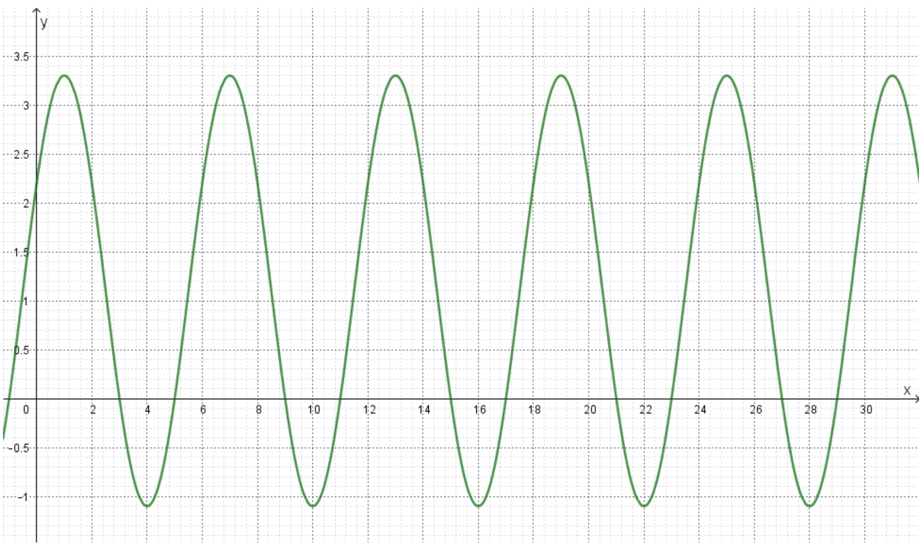
$Sol: \ f(t) = 3.\sin(2t) + 3$



$Sol: \ f(t) = 2.\sin\left(4t - \frac{\pi}{2}\right) - 1$

4. En juin, à Johannesburg, on atteint en moyenne une température minimale de 3°C et maximale de 18°C chaque jour du mois. On atteint typiquement la température moyenne de la journée à 10 h et 22 h, et la température maximale au cours de l'après-midi.
   Donne l'expression de la température en fonction de l'heure de la journée à partir de minuit.
   Sol : $f\left(t\right)=7,5.\sin\left(\frac{\pi}{12}t-\frac{5\pi}{6}\right)+10,5$

5. La roue à aubes d'un bateau a un diamètre de 4,4 m et tourne à une vitesse de 10 tours/min dans le sens antihoraire. Son centre est situé à 1,1 m au-dessus de la surface de l'eau.
   L'une des pales de la roue à aubes est brisée. Au moment de mettre la roue en marche, l'extrémité de la pale brisée se trouve à 2,2 m au-dessus de la surface de l'eau.
   (1) Représente graphiquement la fonction qui permet de déterminer la hauteur (en m) de l'extrémité de la pale brisée par rapport à la surface de l'eau selon le temps t (en secondes) sur l'intervalle $\left[0;30\right]$ s.
   Sol :



   (2) Détermine une expression de la fonction que tu viens de représenter.
   Sol : $f\left(t\right)=2,2.\sin\left(\frac{\pi}{3}t+\frac{\pi}{6}\right)+1,1$

6. Lisa nourrit son chien avec les restes de ses repas. Comme ces restes varient au cours des saisons, le poids du chien varie aussi tout au long de l'année.

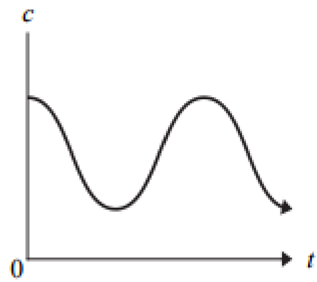
   On peut modéliser son poids P en fonction du temps t (en jours) par une fonction trigonométrique de la forme $P(t) = a.\sin(b.t + c) + d$.

   Au début de l'année, à $t = 0$, il a son poids maximum de 9,1 kg. Un trimestre après, à $t = 91,25$, son poids a diminué jusqu'à sa valeur moyenne qui est de 8,2 kg.

   Etablis l'expression de la fonction de la fonction trigonométrique qui modélise le poids du chien de Lisa.

   Sol : $P(t) = 0,9.\sin\left(\frac{2\pi}{365}t - 4,71\right) + 8,2$

7. Un certain médicament détruit les cellules malades dans le corps d'une personne. Le nombre de cellules malades baisse pendant un court temps après avoir administré une dose du médicament et augmente ensuite. Cette situation varie de façon sinusoïdale et est modélisée par l'expression suivante :



$$c(x) = 350.\sin\left(\pi t + \frac{\pi}{2}\right) + 650$$

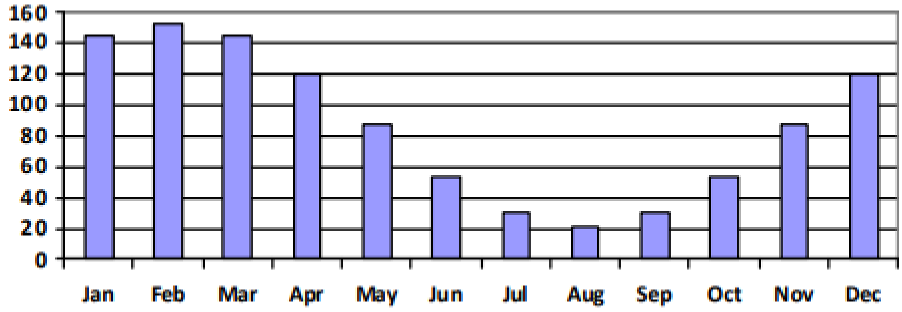
   où t représente le temps en semaines et c représente le nombre de cellules malades.

   (1) Si la dose initiale du médicament est administrée à $t = 0$, quand administre-t-on la deuxième dose ?

   (2) Quel est l'ensemble-image de cette fonction ?

   (3) Un patient déclare qu'il se sent bien quand le nombre de ses cellules malades est inférieur à 500. A $t = 2,5$ semaines, le patient se sentira-t-il bien ?

8. La consommation mensuelle de gaz de Steve est représentée par le graphique ci-dessous. Détermine l'expression analytique d'une fonction qui se rapproche au mieux des données.



Sol : $f(t) = 66.\sin\left(-\frac{\pi}{6}t + \frac{2\pi}{3}\right) + 87$

9. Convertis chaque taux de variation en radians par seconde.
   (1) 0,4°/seconde
   Sol : 0,007 rad/s
   (2) 42°/heure
   Sol : 0,0002 rad/s

F. Formules d'addition, de duplication, de Carnot et de Simpson

1. Calcule la valeur exacte (contenant des racines carrées) des expressions suivantes, sans utiliser la calculatrice :

   (1) $\cos 75°$

   Sol : $\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

   (2) $\sin 165°$

   Sol : $\dfrac{-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

   (3) $\sin 10°.\cos 20° + \sin 20°.\cos 10°$

   Sol : $\dfrac{1}{2}$

   (4) $\cos\dfrac{\pi}{12}$

   Sol : $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

2. Démontre que chaque expression s'exprime d'une manière simplifiée, qui est indépendante de x :

   (1) $\sin x + \sin\left(x+\dfrac{2\pi}{3}\right) + \sin\left(x+\dfrac{4\pi}{3}\right)$

   Sol : L'expression vaut toujours 0.

   (2) $\sin(a+x)+\sin(a-x)-2\sin a.\cos x$

   Sol : L'expression vaut toujours 0.

   (3) $1-\cos 2x + 2\left(\sin^2 a.\cos^2 x - \sin^2 x.\cos^2 a\right)$

   Sol : $2\sin^2 a$

3. Calcule $\sin(a-b)$, sachant que a et b sont deux angles aigus et que $\cos a = \dfrac{4}{5}$ et $\cos b = \dfrac{3}{5}$.

   Sol : $\sin(a-b) = -\dfrac{7}{25}$

4. Calcule $\cos(a+b)$, sachant que a et b sont deux angles aigus et que $\cos a = \frac{8}{17}$ et $\sin b = \frac{4}{5}$.

Sol : $\cos(a+b) = -\frac{36}{85}$

5. Sachant que $\tan\alpha = \frac{1}{2}$ et que $\frac{\cos(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} = \frac{3}{5}$, détermine la valeur exacte de $\tan\beta$.

Sol : $\tan\beta = -\frac{1}{2}$

6. x est un angle appartenant à l'intervalle $\left[\frac{\pi}{2};\pi\right]$.

On donne $\cos x = -\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$, calcule $\cos(2x)$ et déduis-en la valeur de $2x$.

Sol : $\cos(2x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ Ainsi, $2x = \frac{\pi}{6}$

7. On donne $\cos 2a = \frac{2}{3}$ (avec $\frac{\pi}{2} \le a \le \pi$). Calcule $\sin a$.

Sol : $\sin a = \frac{\sqrt{6}}{6}$

8. On donne $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$.

   (1) Calcule la valeur exacte (contenant des racines carrées) de $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.

   Sol : $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$

   (2) Calcule la valeur exacte de $\cos\left(\frac{3\pi}{5}\right)$.

   Sol : $\cos\left(\frac{3\pi}{5}\right) = \frac{1-\sqrt{5}}{4}$

9. Démontre que pour tout $x \in \left]0;\frac{\pi}{2}\right[$, $\tan x = \frac{1-\cos(2x)}{\sin(2x)}$.

Déduis-en les valeurs exactes de $\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)$ et de $\tan\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

Sol : $\tan\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{2} - 1$ et $\tan\left(\frac{\pi}{12}\right) = 2 - \sqrt{3}$

10. Démontre les identités suivantes :

(1) $\sin(2x) - \tan x.\cos(2x) = \tan x$

(2) $\sin 5x.\sin x = \sin^2 3x - \sin^2 2x$

(3) $\frac{\sin x + \sin 2x + \sin 3x}{\cos x + \cos 2x + \cos 3x} = \tan 2x$

(4) $\frac{\sin 3x}{\sin x} - \frac{\cos 3x}{\cos x} = 2$

(5) $\frac{\sin(a+b)}{\sin(a-b)} = \frac{\tan a + \tan b}{\tan a - \tan b}$

(6) $\frac{\sin(a-b)}{\cos a.\cos b} + \frac{\sin(b-c)}{\cos b.\cos c} + \frac{\sin(c-a)}{\cos a.\cos c} = 0$

G. Equations et inéquations trigonométriques

1. Résous les équations suivantes en radians (sans calculatrice); donne les conditions d'existence et indique les solutions principales :

   (1) $\cos(2x) = \cos(3x - \pi)$

   Sol : $x = \pi + 2k\pi$ ou $x = \frac{\pi}{5} + 2k\frac{\pi}{5}$

   $SP = \left\{\pi; \frac{\pi}{5}; \frac{3\pi}{5}; \frac{7\pi}{5}; \frac{9\pi}{5}\right\}$

   (2) $\cos(2x) = \cos(3\pi)$

   Sol $: x = \frac{3\pi}{2} + k\pi$ ou $x = -\frac{3\pi}{2} + k\pi$

   $SP = \left\{\frac{3\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right\}$

   (3) $\sin x = 0$

   Sol : $x = k\pi$

   $SP = \{0; \pi\}$

   (4) $\sin(3x) = -\sin\left(\frac{\pi}{3} + x\right)$

   Sol : $x = \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2}$ ou $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$

   $SP = \left\{\frac{\pi}{6}; \frac{2\pi}{3}; \frac{7\pi}{6}; \frac{5\pi}{3}; \frac{5\pi}{6}\right\}$

   (5) $\cos(2x) = \cos x$

   Sol : $x = 2k\pi$ ou $x = \frac{2k\pi}{3}$

   $SP = \left\{0; \frac{2\pi}{3}; \frac{4\pi}{3}\right\}$

(6) $\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=\cos(5x)$

$Sol:\quad x=\frac{\pi}{6}+k\frac{\pi}{3}$ ou $x=-\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}$

$SP=\left\{\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2}\frac{5\pi}{6};\frac{7\pi}{6};\frac{3\pi}{2};\frac{11\pi}{6};\frac{\pi}{4};\frac{3\pi}{4};\frac{5\pi}{4};\frac{7\pi}{4}\right\}$

(7) $\frac{\sqrt{3}}{2}\cos(2x)+\frac{1}{2}\sin(2x)=\cos\frac{\pi}{7}$

$Sol:\quad x=\frac{\pi}{84}+k\pi$ ou $x=\frac{13\pi}{84}+k\pi$

$SP=\left\{\frac{\pi}{84};\frac{85\pi}{84};\frac{13}{84};\frac{97\pi}{84}\right\}$

(8) $2\sin^2 x+4\sin x+2=0$

$Sol:\quad x=\frac{3\pi}{2}+2k\pi$

$SP=\left\{\frac{3\pi}{2}\right\}$

(9) $\sin^2 x-\cos^2 x+\sin x=0$

$Sol:\quad x=\frac{\pi}{6}+2k\frac{\pi}{3}$ ou $x=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$

$SP=\left\{\frac{\pi}{6};\frac{5\pi}{6};\frac{3\pi}{2}\right\}$

(10) $2\sin^3 x-17\sin^2 x+7\sin x+8=0$

$Sol:\quad x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$ ou $x=-\frac{\pi}{6}+2k\pi$ ou $x=\frac{7\pi}{6}+2k\pi$

$SP=\left\{\frac{\pi}{2};\frac{11\pi}{6};\frac{7\pi}{6}\right\}$

(11) $\cos^2 x-\sin^2 x=\cos x$

$Sol:\quad x=2k\pi$ ou $x=\frac{2k\pi}{3}$

$SP=\left\{0;\frac{2\pi}{3};\frac{4\pi}{3}\right\}$

(12) $\cos x+\cos 5x=\cos 3x+\cos 7x$

Sol : $x=\dfrac{\pi}{4}+k\dfrac{\pi}{2}$ ou $x=k\pi$ ou $x=k\dfrac{\pi}{4}$

$SP=\left\{\dfrac{\pi}{4};\dfrac{3\pi}{4};\dfrac{5\pi}{4};\dfrac{7\pi}{4};0;\pi;\dfrac{\pi}{2};\dfrac{3\pi}{2}\right\}$

(13) $2\cos^2 x+3\cos\left(x+\pi\right)=2$

Sol : $x=\dfrac{2\pi}{3}+2k\pi$ ou $x=-\dfrac{2\pi}{3}+2k\pi$

$SP=\left\{\dfrac{2\pi}{3};\dfrac{4\pi}{3}\right\}$

(14) $\cos x+\sin x=1$

Sol : $x=2k\pi$ ou $x=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$

$SP=\left\{0;\dfrac{\pi}{2}\right\}$

(15) $\sqrt{3}\cos 2x+\sin 2x=2$

Sol : $x=\dfrac{\pi}{12}+k\pi$

$SP=\left\{\dfrac{\pi}{12};\dfrac{13\pi}{12}\right\}$

(16) $\cos x+\cos 2x+\cos 3x=0$

Sol : $x=\dfrac{\pi}{4}+k\pi$ ou $x=\dfrac{2\pi}{3}+2k\pi$

$SP=\left\{\dfrac{\pi}{4};\dfrac{5\pi}{4};\dfrac{2\pi}{3}\right\}$

(17) $\sin^3 x+2.\cos^3 x=3.\sin^2 x.\cos x$ (*UCL, Juillet 2018*)

Sol : $x=\dfrac{\pi}{4}+k\pi$ ou $x=1,22+k\pi$ ou $x=-0,63+k\pi$

$SP=\left\{\dfrac{\pi}{4};\dfrac{5\pi}{4};1,22;2,51\right\}$

2. *UCL, Septembre 2018*

   Résoudre l'équation trigonométrique suivante :

$$\sin x - 2.\sin(3x) + \sin(5x) = -\cos(2x) + \cos(4x)$$

   Représenter les solutions principales appartenant à l'intervalle $[-\pi;\pi[$ sur le cercle trigonométrique.

   Sol : $S = \left\{-\pi; 0; -\frac{2\pi}{3}; -\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}; -\frac{11\pi}{6}; \frac{\pi}{6}; -\frac{7\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}\right\}$

3. *UCL, Septembre 2017*

   (1) Résolvez l'équation suivante en spécifiant les conditions d'existence :

$$2\sin^2 x.\cot x + \sin(3x) + \sin x = 0$$

   Sol : CE : $x \neq k\pi$

$$S = \left\{-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}\right\}$$

   (2) Représentez sur le cercle trigonométrique les solutions comprises entre $-\pi$ et π.

4. Calcule les racines de la fonction $f(x) = \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) + \frac{1}{2}$.

   Sol : $x = k\pi$ et $x = \frac{2\pi}{3} + k\pi$

5. Résous l'équation $\frac{1}{\cos x} + \frac{1}{\sin x} = 2\sqrt{6}$ en radians, indique les conditions d'existence et indique les solutions principales.

   Sol : CE : $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ et $x \neq k\pi$

$$x = -0,17 + k\pi \text{ ou } x = 1,74 + k\pi \text{ ou } x = \frac{\pi}{12} + k\pi \text{ ou } x = \frac{5\pi}{12} + k\pi$$

$$SP = \left\{2,97; 6,11; 1,74; 4,88; \frac{\pi}{12}; \frac{13\pi}{12}; \frac{5\pi}{12}; \frac{17\pi}{12}\right\}$$

6. Résous les inéquations suivantes :

(1) $2\sin x - 1 > 0$

Sol : $\frac{\pi}{6} + 2k\pi < x < \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$

$$S = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]\frac{\pi}{6} + 2k\pi ; \frac{5\pi}{6} + 2k\pi\right[$$

(2) $2\sin(2x) - \sqrt{3} \leq 0$

Sol : $\frac{\pi}{3} + k\pi \leq x \leq \frac{7\pi}{6} + k\pi$

$$S = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left[\frac{\pi}{3} + k\pi ; \frac{7\pi}{6} + k\pi\right]$$

(3) $\cos(6x+3) \leq -1$

Sol : $S = \varnothing$

(4) $\cos\left(3x - \frac{\pi}{9}\right) \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$

Sol : $-\frac{5\pi}{108} + 2k\frac{\pi}{5} \leq x \leq \frac{13\pi}{108} + 2k\frac{\pi}{5}$

$$S = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left[-\frac{5\pi}{108} + 2k\frac{\pi}{5} ; \frac{13\pi}{108} + 2k\frac{\pi}{5}\right]$$

(5) $\cos(3x).\cos x + \sin(3x).\sin x \geq -\frac{\sqrt{2}}{2}$

Sol : $\frac{5\pi}{8} + k\pi \leq x \leq \frac{11\pi}{8} + k\pi$

$$S = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left[\frac{5\pi}{8} + k\pi ; \frac{11\pi}{8} + k\pi\right]$$

(6) $3\tan(3x) - \sqrt{3} \leq 0$

Sol : $\frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{3} < x \leq \frac{7\pi}{18} + k\frac{\pi}{3}$

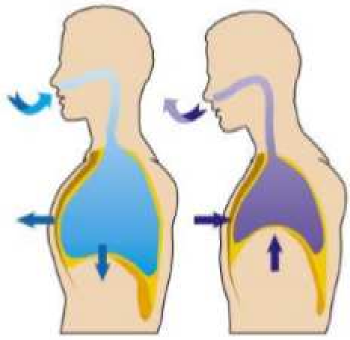
$$S = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]\frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{3} ; \frac{7\pi}{18} + k\frac{\pi}{3}\right]$$

7. Détermine le domaine de définition de la fonction $f\left(x\right)=\sqrt{\tan x+1}$.

$$Sol:\ dom\, f=\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left[-\frac{\pi}{4}+k\pi;\frac{\pi}{2}+k\pi\right[$$

H. Problèmes

1. Le processus rythmique de la respiration consiste en une alternance de périodes d'*inspiration* et d'*expiration*. Un cycle complet a normalement une durée de 5 secondes.

   La fonction $F(t)$ (en litres/seconde) qui décrit le flux d'air au temps t (en secondes) est une fonction sinusoïdale.
   Le flux d'air maximal est de 0,6 l/s.

   (1) Détermine une expression de $F(t)$.

   Sol : $F(t)=0{,}3\sin\left(\frac{2\pi}{5}t-\frac{\pi}{2}\right)+0{,}3$

   (2) Détermine à quels moments, entre 0 et 5 secondes, le flux d'air est de 0,2 l/s.

   Sol : $t=0{,}98$ s et $t=4{,}02$ s

   (3) Détermine à quels moments, entre 0 et 5 secondes, le flux d'air est supérieur ou égal à 0,1 l/s.

   Sol : $0{,}67\leq t\leq 4{,}33$ s

2. Pose les conditions d'existence et détermine le domaine de définition de la fonction $f(x)=\sqrt{1+2\sin x}$.

   Sol : CE : $1+2\sin x\geq 0$

   $$\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left[-\frac{\pi}{6}+2k\pi;\frac{7\pi}{6}+2k\pi\right]$$

3. La température, en °C, durant une journée peut être modélisée par une fonction sinusoïdale en fonction du temps, exprimé en heures.

   (1) Détermine l'expression analytique d'une telle fonction si la température varie entre 10°C et 30°C et si la température moyenne 20°C survient pour la première fois à 9h du matin.

   Sol : $T(t)=10\sin\left(\frac{\pi}{12}t-\frac{3\pi}{4}\right)+20$

   (2) A quels moments de la journée a température est-elle de 15°C ?

   Sol : A 7h et à 23h

   (3) Pendant combien de temps la température sera-t-elle supérieure à 28°C ?

   Sol : Pendant 4,92 h (entre $t=12{,}54$ et $t=17{,}46$)

4. À tout moment, notre cœur bat, notre pression sanguine augmente pour décroître ensuite entre deux battements. Les maximum et minimum de pression sanguine portent respectivement les noms de pression systolique et diastolique.

   La lecture de notre pression sanguine, à l'aide d'un tensiomètre, est traduite par deux chiffres correspondant aux pressions systolique/diastolique. Une lecture de 12/8 est considérée comme normale.

   La pression sanguine d'une personne est modélisée par la fonction $p(t) = 11,5 + 2,5\sin(160\pi t)$ dans laquelle $p(t)$ est la pression sanguine en cmHg et t est le temps exprimé en minutes.

   (1) Calcule la période de p.

   Sol : $T = \frac{1}{30}$ minutes $= 2$ secondes

   (2) Calcule le nombre de battements de cœur par minute.

   Sol : 30 battements

   (3) A quels moments la pression sanguine vaut-elle 12 ?

   Sol : La pression vaut 12 pour $t = 0,001 + \frac{k}{30}$ et $t = 0,016 + \frac{k}{30}$

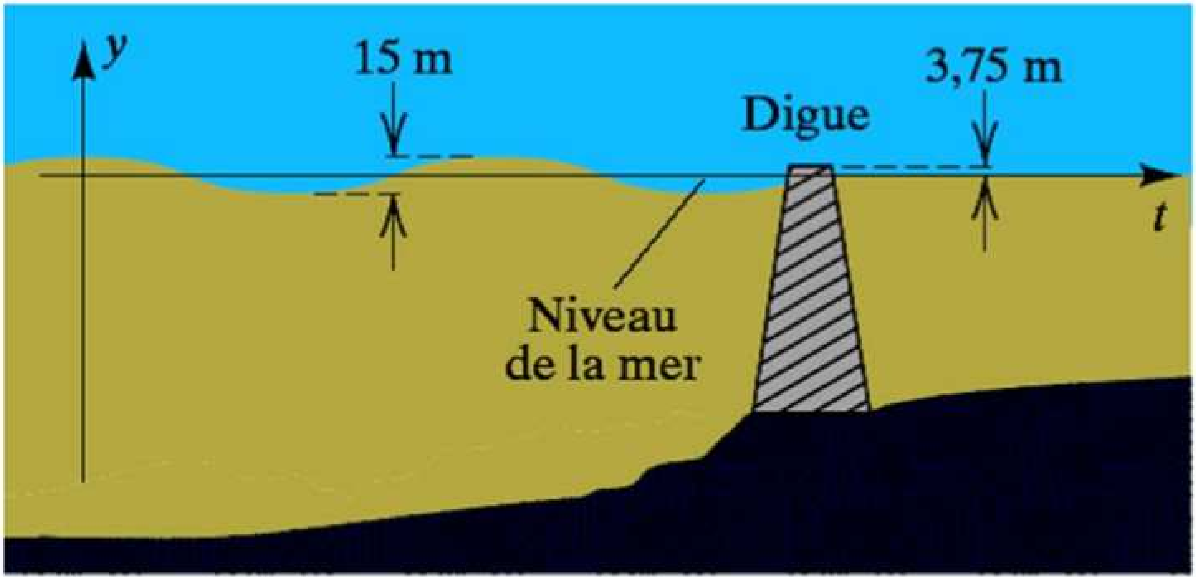
5. Un raz de marée d'une hauteur totale de 15 m et dont la période temporelle des vagues est de 30 minutes s'approche d'une digue qui est à 3,75 m au-dessus du niveau de la mer (voir figure).

   (1) Exprime le mouvement des vagues à l'aide d'une fonction sinusoïdale (détermine son expression analytique).

   Sol : $f(t) = 7,5\sin\left(\frac{\pi}{15}t\right)$

   (2) Détermine pendant combien de minutes le sommet de la vague se trouve au-dessus du sommet de la digue en une période de 30 minutes.

   Sol : Le sommet de la vague est au-dessus du sommet de la digue pendant 10 minutes (entre les temps $t = 2,5$ et $t = 12,5$).

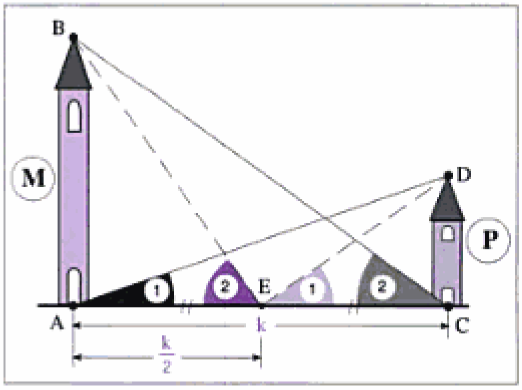


6. Une place horizontale sépare les clochers des églises M et P. Ils sont séparés l'un de l'autre d'une distance k.

   Du pied du clocher P, on voit le clocher M sous un angle double de celui sous lequel on voit le clocher P, depuis le pied du clocher M.

   Par contre, si l'on se situe à mi-chemin des pieds de ces clochers, on les voit sous des angles complémentaires.

   Calcule les hauteurs des deux clochers en fonction de k.



7. Une formule d'Euler : Vérifie :

   $\sin(36°+a)-\sin(36°-a)+\sin(72°-a)-\sin(72°+a)=\sin a$.

I. Limites de fonctions trigonométriques

1. Calcule les limites suivantes, distingue éventuellement les limites à gauche et à droite.
   Donne une interprétation graphique du résultat.

Solutions :

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{\sin^3 x}$ — $\dfrac{1}{2}$ ➔ Trou en $\left(0;\dfrac{1}{2}\right)$

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\sin x}$ — $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=-\infty$ ➔ $AV\equiv x=0$

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\sin x}{4x}$ — $\dfrac{3}{4}$ ➔ Trou en $\left(0;\dfrac{3}{4}\right)$

(4) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{1}{\cos x}$ — $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^+} f(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^-} f(x)=+\infty$ ➔ $AV\equiv x=\dfrac{\pi}{2}$

(5) $\lim\limits_{x\to \frac{3\pi}{2}}\dfrac{1}{\cos x}$ — $\lim\limits_{x\to \frac{3\pi}{2}^+} f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to \frac{3\pi}{2}^-} f(x)=-\infty$ ➔ $AV\equiv x=\dfrac{3\pi}{2}$

(6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{\sin x}$ — 0 ➔ Trou en $(0;0)$

(7) $\lim\limits_{x\to -\frac{\pi}{4}}\dfrac{2x}{\tan x+1}$ — $\lim\limits_{x\to -\frac{\pi}{4}^+} f(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to -\frac{\pi}{4}^-} f(x)=+\infty$ ➔ $AV\equiv x=-\dfrac{\pi}{4}$

(8) $\lim\limits_{x\to +\infty}\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$ — 1 ➔ $AH_{+\infty}\equiv y=1$

(9) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos(a+x)-\cos x}{x}$ — $=-\sin a$ ➔ Trou en $(0;-\sin a)$

J. Pour se dépasser

1. Calcule les longueurs des trois côtés d'un triangle sachant qu'il s'agit de trois nombres entiers consécutifs et que le plus grand angle vaut le double du plus petit.
   Sol : Les côtés mesurent 4, 5 et 6.

2. Si a, b, c sont en progression arithmétique, montre que $\dfrac{\sin a + \sin b + \sin c}{\cos a + \cos b + \cos c} = \tan b$